

# Lista 1 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2023

1. Duas irmãs gêmeas, Ana e Bia, estão inicialmente na origem de um referencial inercial  $K$ . Bia dá adeus a Ana e segue viagem de forma que, no referencial  $K$  (em unidades em que  $c = 1$ ),

$$x_{\text{Ana}}(t) = 0, \quad x_{\text{Bia}}(t) = \sin(t + a) - \sin(a),$$

com  $a = \pi/6$ .

- (a) Desenhe o diagrama espaço-temporal dos eventos descritos acima, desde a partida de Bia até seu reencontro com Ana.

- (b) Quanto tempo terá passado para Ana entre a despedida e o reencontro? E para Bia? Interprete.

- (c) A situação é simétrica entre Bia e Ana? Interprete.



2. (Problema 17, capítulo 1 do Schutz) Uma vara de  $20m$  de comprimento se encontra no chão, ao lado de um celeiro de  $15m$  de comprimento, onde Deslous descansa. Seu amigo Defleche pega essa vara, leva-a para longe, e corre com ela em direção ao celeiro a uma velocidade de  $0.8c$ . Deslous permanece em repouso ao lado da porta do celeiro.

- (a) Qual o tamanho da vara medido por Deslous quando esta vem em direção ao celeiro?
- (b) A porta do celeiro está inicialmente aberta e, imediatamente após Defleche e a vara estarem inteiramente dentro dele, Deslous fecha a porta. De acordo com Deslous, quanto tempo se passa depois de a porta estar fechada para que a frente da vara bata na outra extremidade do celeiro? Calcule o intervalo entre os eventos “fechar a porta” e “bater na parede”. É tipo tempo, espaço ou nulo?
- (c) Qual é o comprimento do celeiro e da vara como medidos por Defleche enquanto este corre?
- (d) Defleche acredita que a vara está totalmente dentro do celeiro quando sua extremidade bate no final do celeiro? Você pode explicar por quê?
- (e) Após a colisão, a vara e Defleche param em relação ao celeiro. Do ponto de vista de Deslous, a vara de  $20m$  está agora dentro de um celeiro de  $15m$ , já que a porta do celeiro foi fechada antes de a vara parar. Como isso é possível? Alternativamente, do ponto de vista de Defleche, a colisão deveria ter parado a vara antes que a porta fosse fechada, de maneira que a porta nem sequer pode ter sido fechada. E então, o que de fato acontece?

- (f) Desenhe um diagrama do espaço-tempo do ponto de vista de Deslou e use-o para ilustrar e justificar todas as suas conclusões.

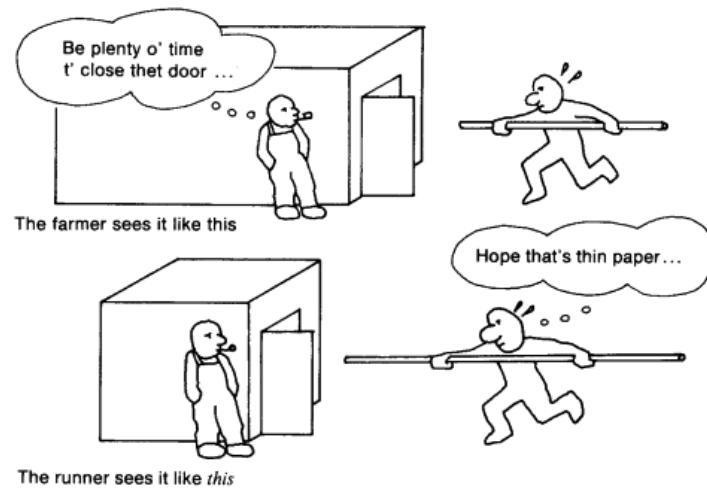


Figura 1: Paradoxo da vara e do celeiro (problema 2 desta lista). Figura retirada da página 80 do ótimo livro *Geometry, relativity and the fourth dimension*, de Rudolf v.B. Rucker (Dover, 1977).

3. (Problema 16, capítulo 1 do Schutz) Use as transformações de Lorentz para derivar diretamente (a) a dilatação do tempo, e (b) as fórmulas de contração de Lorentz. Faça isso identificando os pares de eventos em que as separações (no tempo ou no espaço) devem ser comparadas e, em seguida, aplicando as transformações de Lorentz.
4. (Problema 7, apêndice A do Foster & Nightingale) Uma distribuição uniforme de carga com densidade própria  $\rho_0$  encontra-se em repouso no referencial  $K$ . Mostre que um observador se movendo com velocidade  $\mathbf{v}$  com relação a  $K$  vê uma densidade de carga  $\gamma\rho_0$  e uma densidade de corrente  $-\gamma\rho_0\mathbf{v}$ .
5. (Problema 26, capítulo 2 do Schutz) Calcule a energia que é necessária para acelerar uma partícula de massa de repouso  $m \neq 0$  de uma velocidade  $v$  para uma velocidade  $v + \delta v$ , em primeira ordem em  $\delta v$ . Mostre que seria necessária uma quantidade infinita de energia para acelerar a partícula até a velocidade da luz.
6. (Problema 32, capítulo 2 do Schutz) Considere que uma partícula de carga  $e$  e massa de repouso  $m$ , inicialmente em repouso no laboratório, sofre a colisão de um fóton de frequência inicial  $\nu_i$ . Suponha que o fóton espalhado saia em um ângulo  $\theta$  em relação à direção incidente.

Use a conservação do quadrimomento para deduzir que a frequência final do fóton é dada por

$$\frac{1}{\nu_f} = \frac{1}{\nu_i} + h \left( \frac{1 - \cos \theta}{m} \right).$$

Esse é o chamado de espalhamento Compton.